مذكرة رقم4 في درس تحليلية الجداء السلمي وتطبيقاته

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
3.1. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم: ـ الصيغة التحليلية لمنظم متجهة ولمسافة نقطتين؛ ـ صيغة $\cos\theta$ وصيغة $\sin\theta$؛ **3.2. المستقيم في المستوى (دراسة تحليلية):** ـ المتجهة المنظمية لمستقيم؛ ـ معادلة ديكارتية لمستقيم محدد بنقطة ومتجهة منظمية له؛ ـ مسافة نقطة عن مستقيم. **3.3. الدائرة (دراسة تحليلية)** ـ معادلة ديكارتية لدائرة؛ ـ تمثيل بارامتري لدائرة؛ ـ دراسة مجموعة النقط: $\{M(x;y)/x^2+y^2+ax+by+c=0\}$. ـ دراسة الأوضاع النسبية لدائرة ومستقيم؛ ـ معادلة ديكارتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة معلومة من الدائرة.	ـ التعبير عن توازي وتعامد مستقيمين؛ ـ حساب قياسات زوايا ومساحات باستعمال الجداء السلمي. ـ التعرف على مجموعة النقط من المستوى التي تحقق العلاقة: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ ـ تحديد مركز وشعاع دائرة معرفة بمعادلتها الديكارتية؛ ـ المرور من معادلة ديكارتية إلى تمثيل بارامتري والعكس؛ ـ استعمال تحليلية الجداء السلمي في حل مسائل هندسية وجبرية.	ـ تعتبر الدراسة التحليلية لدائرة مجالا خصبا لتوظيف تحليلية الجداء السلمي خاصة منها تلك المتعلقة بالمسافة والتعامد، لذا ينبغي الحرص على إبراز دور الطريقة التحليلية في حل بعض المسائل الهندسية. ـ ينبغي استعمال الجداء السلمي في تحديد معادلة ديكارتية لدائرة؛ ـ يتم التطرق من خلال أنشطة إلى دائرة محددة بثلاث نقط غير مستقيمية؛ ـ يتم بهذه المناسبة، استغلال التجويه التحليلي للمستوى لتقديم نماذج للحل المبياني لبعض المتراجحات غير الخطية بمجهولين.

I. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم

1. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم

تعاريف: ليكن $(\vec{i};\vec{j})$ أساسا في المستوى و O نقطة من المستوى

● نقول إن $(\vec{i};\vec{j})$ أساس متعامد ممنظم إذا كان :

$\|\vec{i}\|=1$ و $\|\vec{j}\|=1$ و $\vec{i}.\vec{j}=0$

● نقول إن المعلم $(0;\vec{i};\vec{j})$ متعامد ممنظم إذا كان $(\vec{i};\vec{j})$ أساسا متعامدا ممنظما

● إذا كان $(\vec{i};\vec{j})$ أساس متعامد ممنظم و $(\overline{\vec{i};\vec{j}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ نقول إن $(0;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد ممنظم ومباشر

<u>دائما في جميع فقرات الدرس ننسب المستوى إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر</u> $(0;\vec{i};\vec{j})$

<u>نشاط :</u> لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متجهتين من معلم $(0;\vec{i};\vec{j})$ متعامد ممنظم ومباشر أحسب : $\vec{u}.\vec{v}$

<u>الجواب:</u>

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)=xx'\vec{i}\cdot\vec{i}+xy'\vec{i}\cdot\vec{j}+yx'\vec{j}\cdot\vec{i}+yy'\vec{j}\cdot\vec{j}$$

$\vec{i}\cdot\vec{i}=\|\vec{i}\|\times\|\vec{i}\|\times\cos 0=1\times1\times1=1$ و $\vec{j}\cdot\vec{j}=\|\vec{j}\|\times\|\vec{j}\|\times\cos 0=1\times1\times1=1$

$\vec{i}\cdot\vec{j}=\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\times\cos\frac{\pi}{2}=1\times1\times0=0$ ومنه : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$

خاصية 1: لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$. متجهتين من المستوى , لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

خاصية 2: تكون المتجهتان $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متعامدتين إذا وفقط إذا كان : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

مثال نعتبر المتجهات

$\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ و $\vec{v}=2\vec{i}-\vec{j}$ و $\vec{w}=5\vec{i}+3\vec{j}$.

أحسب الجداءات السلمية التالية : $\vec{u}.\vec{v}$ و $\vec{v}.\vec{w}$ و $\vec{u}.\vec{w}$

<u>الجواب :</u> $\vec{u}.\vec{v}=1\times2+2\times(-1)=0$ اذن : $\vec{u}\perp\vec{v}$

$\vec{v}.\vec{w}=2\times5+3\times(-1)=7$ و $\vec{u}.\vec{w}=1\times5+3\times2=11$

<u>تمرين1</u>: حدد قيمة العدد الحقيقي m لكي تكون المتجهتان $\vec{u}(3;-1+m)$ و $\vec{v}(2-m;5)$ متعامدتين

<u>الجواب :</u> $\vec{u}\perp\vec{v}$ يعني $\vec{u}.\vec{v}=0$ يعني $3(2-m)+5\times(-1+m)=0$

$6-3m-5+5m=0$ يعني $2m+1=0$ يعني $m=-\frac{1}{2}$

<u>تمرين2</u>: حدد قيمة العدد الحقيقي m لكي تكون المتجهتان $\vec{u}(-1+m;2)$ و $\vec{v}\left(2-m;\frac{1}{2}\right)$ متعامدتين

<u>الجواب:</u> $\vec{u}\perp\vec{v}$ يعني $\vec{u}.\vec{v}=0$ يعني $(-1+m)(2-m)+2\times\frac{1}{2}=0$

$-2+m+2m-m^2+1=0$ يعني $-m^2+3m-1=0$

يعني $m^2-3m+1=0$ نحسب مميز المعادلة ونجد :

$\Delta=5$ ومنه للمعادلة حلين هما : $m_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ و $m_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

2. الصيغة التحليلية لمنظم متجهة والمسافة بين نقطتين

a) <u>منظم متجهة:</u>

لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ متجهة من المستوى , منظم المتجهة $\vec{u}$ نرمز له بالرمز $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

b) <u>المسافة بين نقطتين:</u>

لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتين من المستوى , المسافة هي :
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$
ملاحظة : $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

مثال أو تمرين3:نعتبر في المستوى النقط التالية :
$A(-1;3)$ $B(3;\sqrt5)$ و $C(2;-3)$ والمتجهة $\vec u(\sqrt5;-2)$

1)أحسب AC و $\|\vec u\|$ 2)أحسب : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CB}$

3) ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث ABC

الأجوبة :

1) $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(2+1)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$

$\|\vec u\|=\sqrt{(\sqrt5)^2+(-2)^2}=\sqrt{5+4}=\sqrt9=3$

2) $\overrightarrow{AB}(3-(-1);\sqrt5-3)$ يعني $\overrightarrow{AB}(4;\sqrt5-3)$

$\overrightarrow{CB}(3-2;\sqrt5+3)$ يعني $\overrightarrow{CB}(1;\sqrt5+3)$

$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CB}=1\times4+(\sqrt5-3)(\sqrt5+3)=4+\left((\sqrt5)^2-3^2\right)=0$

3)نستنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية في B

تمرين4:نعتبر في المستوى النقط التالية : $A(3;2)$ $B\left(-\frac12;0\right)$ و $C(-1;-4)$ و $D\left(\frac52;-2\right)$ $E(1;-1)$

1. بين أن المثلث ABE قائم الزاوية في النقطة E
2. بين أن الرباعي $ABCD$ معين

(يكفي أن نبين أن $ABCD$ متوازي الأضلاع وضلعين متتابعين متقايسين أو نبين أن القطرين متعامدين)

الأجوبة : 1) يكفي أن نبين أن $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{EB}$ أي نبين أن : $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{EB}=0$

$\overrightarrow{AE}(-2;-3)$ و $\overrightarrow{EB}\left(-\frac32;1\right)$

$\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{EB}=3-3=0$ ومنه $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{EB}$ أي ABE قائم الزاوية في النقطة E

2) طريقة1: نبين أن $ABCD$ متوازي الأضلاع وضلعين متتابعين متقايسين

لدينا : $\overrightarrow{DC}\left(-\frac72;-2\right)$ و $\overrightarrow{AB}\left(-\frac72;-2\right)$ اذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

ومنه : $ABCD$ متوازي الأضلاع

ولدينا كذلك : $AC=\sqrt{\left(-\frac72\right)^2+(1-1)^2}=\sqrt{\frac{49}{4}+4}=\sqrt{\frac{65}{4}}$ و $BC=\sqrt{\frac14+16}=\sqrt{\frac{65}{4}}$

اذن : $AB=BC$ ومنه : $ABCD$ معين

طريقة2: نبين أن القطرين متعامدين

لدينا : $\overrightarrow{AC}(-4;-6)$ و $\overrightarrow{BD}(3;-2)$

اذن : $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BD}=-12+12=0$

ومنه : $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ وبالتالي: $ABCD$ معين

c) صيغة $\cos$ و $\sin$:

لتكن $\vec u=x\vec i+y\vec j$ و $\vec v=x'\vec i+y'\vec j$. متجهتين غير منعدمتين من المستوى و θ قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec u;\vec v})$

لدينا: $\sin(\widehat{\vec u;\vec v})=\frac{\det(\vec u,\vec v)}{\|\vec u\|\times\|\vec v\|}=\frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

و $\cos(\widehat{\vec u;\vec v})=\frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|\times\|\vec v\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

تمرين5:نعتبر في المستوى المتجهي المتجهتين التاليتين : $\vec u(-1;-1)$ و $\vec v(-2;0)$

1. أحسب : $\cos(\widehat{\vec u;\vec v})$ و $\sin(\widehat{\vec u;\vec v})$
2. استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec u;\vec v})$

الأجوبة:

1) $\cos(\widehat{\vec u;\vec v})=\frac{2}{\sqrt2\times2}=\frac{\sqrt2}{2}\Leftrightarrow\cos(\widehat{\vec u;\vec v})=\frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|\times\|\vec v\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

$\sin(\widehat{\vec u;\vec v})=\frac{-2}{\sqrt2\times2}=-\frac{\sqrt2}{2}\Leftrightarrow\sin(\widehat{\vec u;\vec v})=\frac{\begin{vmatrix}-1&-2\\-1&0\end{vmatrix}}{\sqrt2\times2}$

2)لدينا $\cos(\widehat{\vec u;\vec v})=\frac{\sqrt2}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$ و $\sin(\widehat{\vec u;\vec v})=-\frac{\sqrt2}{2}=-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه $-\frac{\pi}{4}$ هو قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{\vec u;\vec v})$

تمرين6:نعتبر في المستوى النقط التالية : $A(3;3)$ و $B(1;1)$ و $C(1;3)$

1. أحسب : $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ و $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$
2. استنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$

الأجوبة : 1) $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$

$\overrightarrow{AB}(-2,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2,0)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$

$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{4}{\sqrt8\times\sqrt4}=\frac{4}{2\sqrt2\times2}=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}$

$\sin(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{-4}{2\sqrt2\times2}=-\frac{\sqrt2}{2}\Leftrightarrow\sin(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{\begin{vmatrix}-2&-2\\-2&0\end{vmatrix}}{2\sqrt2\times2}$

2)لدينا $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=\frac{\sqrt2}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$

و $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})=-\frac{\sqrt2}{2}=-\sin\frac{\pi}{4}=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه $-\frac{\pi}{4}$ هو قياس للزاوية الموجهة $\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}$

تمرين7:نعتبر في المستوى النقط التالية : $A(4;1)$ $B(0;5)$ و $C(-2;-1)$

1.أحسب المسافات: AB و AC و BC
ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2.أحسب : $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$

3.استنتج أن : $\cos(\widehat{BAC})=\frac{1}{\sqrt5}$

4.أحسب $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ و استنتج أن : $\sin(\widehat{BAC})=\frac{2\sqrt5}{5}$

الأجوبة : 1) $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-4)^2+(4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt2$

$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(-6)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

ومنه : $AC=BC$ ومنه ABC متساوي الساقين

2) $\overrightarrow{AB}(-4,4)$ و $\overrightarrow{AC}(-6,-2)$ ومنه : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24-8=16$

3) $\cos(\widehat{BAC})=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{16}{\sqrt{32}\times\sqrt{40}}=\frac{16}{4\sqrt2\times2\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{20}}=\frac{2\sqrt{20}}{20}=\frac{\sqrt{20}}{10}$

4) $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-4&-6\\4&-2\end{vmatrix}=32$

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\begin{vmatrix}-4 & -6\\ 4 & -2\end{vmatrix}}{8\sqrt{20}} \Leftrightarrow \sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)=\frac{32}{8\sqrt{20}}=\frac{32\sqrt{20}}{160}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

II. المستقيم في المستوى (دراسة تحليلية)

1. متجهة منظميه على مستقيم في المستوى

تعريف :ليكن (D) مستقيم في المستوى

نسمي متجهة منظميه على المستقيم (D) , كل متجهة غير منعدمة ومتعامدة مع متجهة موجهة للمستقيم (D)

(D) $ax+by+c=0$ متجهة منظمية على المستقيم (D) هي: $\vec{n}(a;b)$

أمثلة : أعط متجهة منظمية على المستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية :

1) $(D):x-2y+5=0$ (2 $(D):x-1=0$

3) $(D):2y-3=0$

الأجوبة :

متجهة منظمية على المستقيم (D) $ax+by+c=0$ هي : $\vec{n}(a;b)$

1) $(D):x-2y+5=0$ $\vec{n}(2;1)$ متجهة منظمية على (D)

2) $(D):0x+2y-3=0$ $\vec{n}(-2;0)$ متجهة منظمية على (D)

3) $(D):1x+0y-1=0$ $\vec{n}(0;1)$ متجهة منظمية على (D)

2. معادلة مستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية:

خاصية: معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(x_A;y_A)$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظميه عليه هي : $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

مثال : حدد معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(1;2)$ و $\vec{n}(2;-3)$ متجهة منظمية عليه

الجواب: (هناك طريقتين يمكن استعمالهما)

طريقة1: $M(x;y)\in(D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

لدينا $\overrightarrow{AM}(x-1,y-2)$ و $\vec{n}(2;-3)$

$\Leftrightarrow 2(x-1)-3(y-2)=0 \Leftrightarrow (D)/2x-3y+4=0$

طريقة2: نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمية عليه

نعلم أن : $\vec{n}(2;-3)$ متجهة منظمية على (D)

اذن: $a=2;b=-3$ ومنه المعادلة تصبح : $(D)/2x-3y+c=0$

ونعلم أن : $A(1;2)\in(D)$ اذن احداثياته تحقق المعادلة يعني :

$2\times1-3\times2+c=0$ يعني $c=4$ ومنه : $(D)/2x-3y+4=0$

تمرين8: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(1;2)$ و $B(-2;3)$ و $C(0;4)$

1. حدد معادلة المستقيم (D) واسط القطعة $[AB]$
2. حدد معادلة (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة A

الجواب: 1) واسط القطعة $[AB]$ هو مستقيم عمودي على (AB) ويمر من I منتصف القطعة $[AB]$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AB}(a,b)$ متجهة منظمية على (D)

ولدينا : $\overrightarrow{AB}(-3,1)$ متجهة منظمية على (D) اذن : $a=-3;b=1$

ومنه المعادلة تصبح : $(D)/-3x+y+c=0$

ونعلم أن : $I\in(D)$ علينا أولا حساب احداثيات I

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right)$

$I\in(D)$ اذن احداثيات I تحقق المعادلة يعني :

$-3\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}+c=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{5}{2}+c=0 \Leftrightarrow c=-4$ ومنه : $(D)/-3x+y-4=0$

2) (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة A

يعني (Δ) عمودي على (BC) ويمر من A

ومنه : $\overrightarrow{BC}(2,1)$ متجهة منظميه على (Δ)

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{BC}(a,b)$ متجهة منظمية على (Δ)

اذن : $a=2;b=1$ ومنه المعادلة تصبح : $(\Delta)/2x+y+c=0$

ونعلم أن : $A\in(\Delta)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة يعني :

$2\times1+2+c=0 \Leftrightarrow c=-4$ ومنه : $(\Delta)/2x+y-4=0$

تمرين9: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$A(1;1)$ و $B(-2;0)$ و $C(3;5)$

1. حدد معادلة المستقيم (D) واسط القطعة $[AC]$
2. حدد معادلة (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

الجواب: 1) واسط القطعة $[AC]$ هو مستقيم عمودي على (AC) ويمر من I منتصف القطعة $[AC]$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AC}(a,b)$ متجهة منظمية على (D)

ولدينا : $\overrightarrow{AC}(2,4)$ متجهة منظمية على (D) اذن : $a=2;b=4$

ومنه المعادلة تصبح : $(D)/2x+4y+c=0$

ونعلم أن : $I\in(D)$ علينا أولا حساب احداثيات I

$I\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)$ يعني $I(2,3)$

$I\in(D)$ اذن احداثيات I تحقق المعادلة يعني :

$2\times2+4\times3+c=0 \Leftrightarrow c=-16$

ومنه : $(D)/2x+4y-16=0$

2) (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

يعني (Δ) عمودي على (AB) ويمر من C

ومنه : $\overrightarrow{AB}(-3,-1)$ متجهة منظميه على (Δ)

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$(D)/ax+by+c=0$ و $\overrightarrow{AB}(a,b)$ متجهة منظمية على (Δ)

اذن : $a=-3;b=-1$ ومنه المعادلة تصبح : $(\Delta)/-3x-y+c=0$

ونعلم أن : $C\in(\Delta)$ اذن احداثيات C تحقق المعادلة يعني :

$-9-5+c=0 \Leftrightarrow c=14$ ومنه : $(\Delta)/-3x-y+14=0$

3. تعامد مستقيمين:

خاصية: ليكن (D) و (D') مستقيمين معادلاتهما على التوالي : $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$

يكون المستقيمان (D) و (D') متعامدين إذا وفقط إذا كانت متجهتاهما المنظميتان عليهما متعامدتان أي : $aa'+bb'=0$

تمرين10: نعتبر في المستوى المستقيمين :

$(D):2x+3y-1=0$ و $(D'):\frac{3}{2}x-y+4=0$

هل (D) و (D') متعامدين ؟

الأستاذ : عثماني نجيب

الجواب: $\vec{n}(2;3)$ متجهة منظمية على (D)

$\vec{n'}\left(\frac{3}{2};-1\right)$ متجهة منظمية على (D')

$\vec{n}\cdot\vec{n'}=2\times\frac{3}{2}+3\times(-1)=3-3=0$. ومنه $\vec{n}\perp\vec{n'}$

وبالتالي : $(D)\perp(D')$

4. مسافة نقطة عن مستقيم

تعريف: ليكن (D) مستقيما معادلته : $ax+by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة من المستوى.

مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي : $d(A;(D))=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مثال : $(D)\; x-y+2=0$ و $A(1;4)$ حدد مسافة النقطة A عن المستقيم (D)

الجواب: $d(A;(D))=\frac{|1-4+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

تمرين11: نعتبر في المستوى النقطة: $A(-1;-3)$ و المستقيم (D) الذي معادلته : $x+2y-3=0$

1. أحسب مسافة النقطة A عن المستقيم (D)
2. حدد زوج إحداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D)

الجواب: 1) $d(A;(D))=\frac{|-1-6-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$

2) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (AH):

$\vec{u}(-2,1)$ متجهة موجهة لـ (D) $x+2y-3=0$

اذن $\vec{u}(-2,1)$ منظمية على (AH) اذن: $(AH)/-2x+1y+c=0$

ولدينا $A\in(AH)$ اذن : $(-2)\times(-1)-3+c=0$ يعني $c=1$

ومنه : $(AH)/-2x+1y+1=0$

H هي نقطة تقاطع (AH) و(D) اذن احداثيات H هي حلول النظمة :

$\begin{cases}x+2y-3=0\\-2x+y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\-2x+y=-1\end{cases}$ نضرب المعادلة الأولى في $\times(-2)$

ونجد : $\begin{cases}2x+4y=6\\-2x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow$ ونجمع المعادلتين ونجد : $x+2y=3$

$\Leftrightarrow 2x+4y-2x+y=6-1\Leftrightarrow 5y=5\Leftrightarrow y=1$

ومنه : $x+2y=3\Leftrightarrow x+2=3\Leftrightarrow x=1$ ومنه $H(1;1)$

تمرين12: نعتبر في المستوى النقطتين : $A(-1;-3)$ و $B(3;2)$

1. حدد معادلة للمستقيم (AB)
2. أحسب مسافة النقطة O عن المستقيم (AB)
3. استنتج مساحة المثلث OAB
4. حدد زوج إحداثيتي النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AB)

أجوبة :

1) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (AB):

$\vec{AB}(4,5)$ متجهة موجهة لـ (AB) $\quad\vec{AB}(-b,a)$ اذن :

$a=5;b=-4$

ومنه : $(AB)/5x-4y+c=0$

ولدينا $A\in(AB)$ اذن : $5\times(-1)-4\times(-3)+c=0$ يعني $c=-7$

ومنه : $(AB)/5x-4y-7=0$

2) لدينا $O(0,0)$ اذن :

$$d(O;(AB))=\frac{|5\times0-4\times0-7|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{41}}=\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{7\sqrt{41}}{41}$$

3) لدينا $d(O;(AB))=OH$ اذن :

$$S_{ABC}=\frac{AB\times OH}{2}=\frac{\sqrt{4^2+(-5)^2}}{2}\times\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{\sqrt{41}}{2}\times\frac{7}{\sqrt{41}}=\frac{7}{2}$$

4) نحدد أولا معادلة ديكارتية للمستقيم (OH):

لدينا $\vec{AB}(4,5)$ متجهة منظمية على (OH)

اذن: $(OH)/4x+5y+c=0$ و

ولدينا $O\in(OH)$ اذن : $4\times0+5\times0+c=0$ يعني $c=0$

ومنه : $(OH)/4x+5y=0$

H هي نقطة تقاطع (OH) و(AB) اذن احداثيات H هي حلول النظمة :

$\begin{cases}4x+5y=0\\5x-4y=7\end{cases}$ نستعمل طريقة المحددات لحل هذه النظمة :

محددة النظمة (1) هي: $\Delta=\begin{vmatrix}4&5\\5&-4\end{vmatrix}=-41\neq0$

و منه النظمة تقبل حلا وحيدا: هو: $x=\frac{\begin{vmatrix}0&5\\7&-4\end{vmatrix}}{-41}=\frac{-35}{-41}=\frac{35}{41}$

و منه: $y=\frac{\begin{vmatrix}4&0\\5&7\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{28}{-41}=-\frac{28}{41}$ $\quad H\left(\frac{35}{41};-\frac{28}{41}\right)$

III. معادلة ديكارتية لدائرة

1. معادلة دائرة معرفة بمركزها و شعاعها

خاصية: معادلة الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R $(R\succ0)$ هي : $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

وتكتب أيضا: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ حيث : $c=a^2+b^2-R^2$

مثال1: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $A(-1;-3)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$

الجواب : $(C)\;(x-(-1))^2+(y+3)^2=(\sqrt{2})^2$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة

أو النشر فنجد : $(C)\;x^2+y^2+2x+6y+8=0$

مثال2: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-2;1)$ وتمر من النقطة $A(1;4)$

الجواب : شعاع هذه الدائرة هو : $R=\Omega A$

$$R=\Omega A=\sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2}=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

ومنه معادلة الدائرة هي: $(C)\;(x-(-2))^2+(y-1)^2=(3\sqrt{2})^2$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة

أو النشر فنجد : $(C)\;x^2+y^2+4x-2y-13=0$

وتكتب على الشكل: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

تمرين13: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(1;3)$ و $B(-1;1)$

الجواب : شعاع هذه الدائرة هو : $R=\frac{AB}{2}$

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}{2}=\frac{\sqrt{4+4}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

مركز الدائرة (C) هو :منتصف القطعة $[AB]$

أي : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ يعني $I(0,2)$

ومنه معادلة الدائرة هي : $(C)\ (x-0)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$

يعني : $(C)\ x^2+y^2-4y+2=0$

2. تمثيل بارامتري لدائرة :

خاصية و تعريف: الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R $(R\succ 0)$ هي مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق النظمة : $(S)\begin{cases}x=a+R\cos\theta\\ y=b+R\sin\theta\end{cases}$

و النظمة (S) تسمى تمثيلا بارامتريا للدائرة (C)

مثال1: حدد تمثيلا بارا متريا للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;-2)$ وشعاعها $R=\sqrt{2}$

الجواب : تمثيل بارا متري للدائرة (C) هو : $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\theta\\ y=-2+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$

$(\theta\in\mathbb{R})$ بارا متري حقيقي

مثال2: حدد مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق النظمة $\begin{cases}x=3+\sqrt{3}\cos\theta\\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$ حيث $(\theta\in\mathbb{R})$

الجواب : $\begin{cases}x=3+\sqrt{3}\cos\theta\\ y=1+\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=\sqrt{3}\cos\theta\\ y-1=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{3}\cos\theta\right)^2+\left(\sqrt{3}\sin\theta\right)^2$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=3\left((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\right)$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=\sqrt{3}^2$

ومنه : مجموعة النقط $M(x;y)$ هي الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(3;1)$ وشعاعها $R=\sqrt{3}$

IV. دراسة مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث $x^2+y^2+ax+by+c=0$

1) خاصية: لتكن a و b و c أعدادا حقيقية و (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث $x^2+y^2+ax+by+c=0$

- تكون (E) دائرة إذا وفقط إذا كان : $a^2+b^2-4c>0$ ومركز هذه الدائرة هو $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ و شعاعها هو $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$
- إذا كان $a^2+b^2-4c<0$ فان : (E) هي المجموعة الفارغة
- إذا كان $a^2+b^2-4c=0$ فان (E) هي : $(E)=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)\right\}$

أمثلة : حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق:

.1 $(E):\ x^2+y^2-x+3y-4=0$

.2 $(E):\ x^2+y^2-6x+2y+10=0$

.3 $(E):\ x^2+y^2-4x+5=0$

الأجوبة: 1) $a=-1;b=3;c=-4$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(-1)^2+3^2-4\times(-4)=1+9+16=26>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(\frac{1}{2};\frac{-3}{2})$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

2) $a=-6;b=2;c=10$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(-6)^2+2^2-4\times(10)=36+4-40=0$

ومنه: (E) هي عبارة عن النقطة : $\Omega(3;-1)$

3) $a=-4;b=0;c=5$

نحسب : $a^2+b^2-4c=16-20=-4<0$

ومنه: (E) هي المجموعة الفارغة

تمرين14: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق: $(E):\ x^2+y^2+5x-3y+\frac{11}{2}=0$

الجواب : $a=5;b=-3;c=\frac{11}{2}$

نحسب : $a^2+b^2-4c=5^2+(-3)^2-4\times\left(\frac{11}{2}\right)=25+9-22=12>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-\frac{5}{2};\frac{3}{2})$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

تمرين15: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى التي تحقق:

.1 $(E)\ \ x^2+y^2-1=0$

.2 $(E)\ \ x^2+y^2-2x-6y+6=0$

.3 $(E)\ \ x^2+y^2-4x-2y+7=0$

.4 $(E)\ \ x^2+y^2+8y+12=0$

الأجوبة : 1) $x^2+y^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2-1=0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=1$

2) $x^2-2x+1+y^2-2\times y+3^2-3^2-1+6=0\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-6y+6=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4=(2)^2$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(1;3)$ وشعاعها : $R=2$

3) $x^2-4x+4+y^2-2\times y+1-1-4+7=0\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-2y+7=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=-2$

ومنه : (E) هي المجموعة الفارغة

4) $(x-0)^2+y^2+2\times4\times y+4^2-4^2+12=0\Leftrightarrow x^2+y^2+8y+12=0$

$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y+4)^2=4=(2)^2$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(0;-4)$ وشعاعها : $R=2$

2) داخل وخارج الدائرة

تعاريف: لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R $(R \succ 0)$ و M نقطة من المستوى

- تكون النقطة M نقطة من الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان: $\Omega M = R$
- تكون النقطة M خارج الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان: $\Omega M \succ R$
- تكون النقطة M داخل الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان: $\Omega M \prec R$

تمرين16: حل مبيانيا المتراجحتين التاليتين :

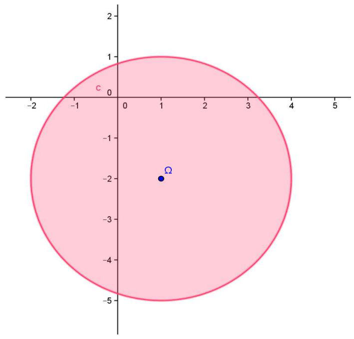
1) $x^2+y^2-2x+4y-4<0$ 2) $x^2+y^2-1>0$

الأجوبة : 1)

$x^2-2x+1-1+y^2+4\times y+4-4-4<0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y-4<0$

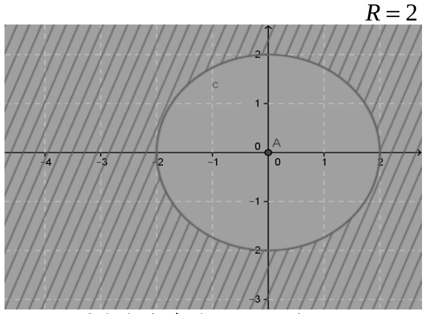
$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2<9=(3)^2$

ومنه : (E) هو داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(1;-2)$ وشعاعها : $R=3$



2) $(x-0)^2+(y-0)^2>2^2 \Leftrightarrow x^2+y^2>4 \Leftrightarrow x^2+y^2-4>0$

ومنه : (E) هو خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=2$



تمرين17: حل مبيانيا النظمة التالية:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1>0 \\ x^2+y^2-4x-12<0 \end{cases}$$

الجواب :

أ) $x^2-4x+4-4+y^2-12<0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-12<0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-0)^2<16=(4)^2$

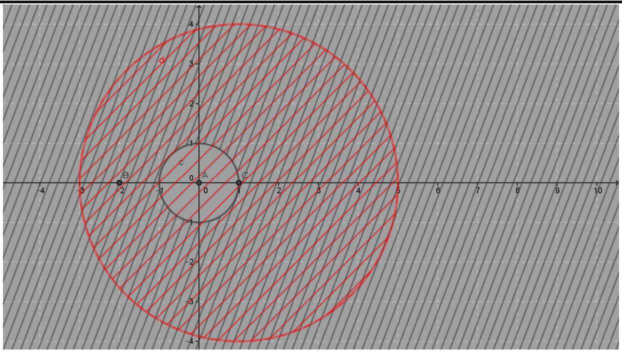
وهذا يعني داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(2;0)$ وشعاعها : $R=4$

ب) $(x-0)^2+(y-0)^2>1^2 \Leftrightarrow x^2+y^2>1 \Leftrightarrow x^2+y^2-1>0$

يعني خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=1$

مجموعة حلول النظمة (E) هي أزواج احداثيات نقط المستوى التي تنتمي الى تقاطع داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(2;0)$ وشعاعها : $R=4$ و خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R=1$

أي الجزء من المستوى المخدش باللونين معا



V. الأوضاع ا لنسبية لمستقيم و دائرة في المستوى

لدراسة الوضع النسبي لمستقيم (D) و دائرة (C) مركزها Ω وشعاعها R يمكننا حساب $d(\Omega;(D))$ مسافة النقطة Ω عن المستقيم (D) ومقارنتها بالشعاع R وبالطبع هناك ثلاث حالات :

- إذا كانت $d(\Omega;(D)) \succ R$ فان: المستقيم (D) لا يقطع الدائرة (C)
- إذا كانت $d(\Omega;(D)) \prec R$ فان : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين
- إذا كانت $d(\Omega;(D)) = R$ فان : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطة وحيدة و نقول أيضا أن (D) مماس للدائرة (C)

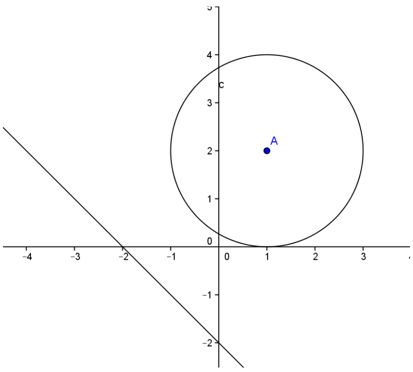
مثال1: أدرس الوضع النسبي للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=2$ مع المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ x+y+2=0$

الجواب: نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$d(\Omega,(P))=\frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>R=2$ ومنه :

المستقيم (D) لا يقطع الدائرة (C)



مثال2: أدرس الوضع النسبي للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=2$ مع المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ x-y+2=0$

الجواب: نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$d(\Omega,(P))=\frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}<R=2$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

سؤال : حدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

معادلة الدائرة هي : $(x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2$

نحل اذن النظمة التالية :

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1)(x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2\\(2)\,x-y+2=0\end{cases}$$

$x+2=y \Leftrightarrow (2)$

نعوض في المعادلة (1) $x+2=y$ فنجد :

$(1)(x-1)^2+(x+2-2)^2=(2)^2$ يعني: $(x-1)^2+(x)^2=4$

يعني: $x^2-2x+1+x^2=4$ يعني: $2x^2-2x-3=0$

نحسب مميز المعادلة فنجد: $\Delta=28$ ومنه للمعادلة حلين هما :

$x_1=\dfrac{2+2\sqrt7}{4}$ و $x_2=\dfrac{2-2\sqrt7}{4}$

يعني: $x_1=\dfrac{1+\sqrt7}{2}$ و $x_2=\dfrac{1-\sqrt7}{2}$

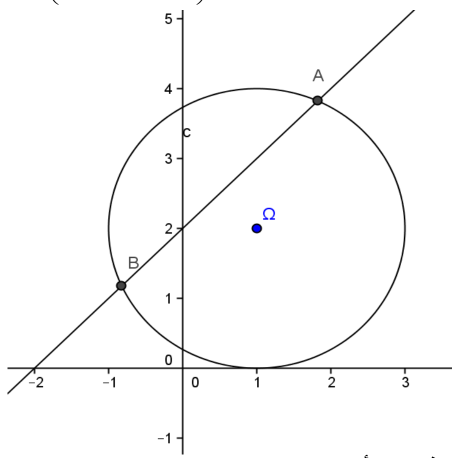
اذا كانت $x_1=\dfrac{1+\sqrt7}{2}$ نعوض في $x+2=y$

فنجد: $y=\dfrac{1+\sqrt7}{2}+2=\dfrac{5+\sqrt7}{2}$

اذا كانت $x_2=\dfrac{1-\sqrt7}{2}$ نعوض في $x+2=y$

فنجد: $y=\dfrac{1-\sqrt7}{2}+2=\dfrac{5-\sqrt7}{2}$

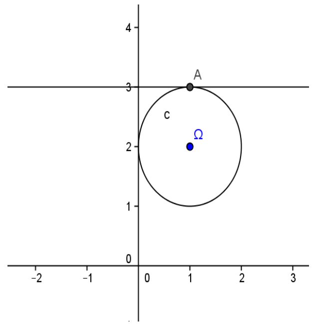
ومنه نقطتا التقاطع هما : $A\left(\dfrac{1+\sqrt7}{2};\dfrac{5+\sqrt7}{2}\right)$ و $B\left(\dfrac{1-\sqrt7}{2};\dfrac{5-\sqrt7}{2}\right)$



مثال3: أدرس الوضع النسبي للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=1$ مع المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ y=3$ **يعني**

$(D):\ 0x+1y-3=0$



الجواب: نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$d(\Omega,(P))=\dfrac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}}=\dfrac{|-1|}{\sqrt1}=1=R$ ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

سؤال : حدد احداثيات نقطة التماس T

معادلة الدائرة هي : $(x-1)^2+(y-2)^2=1^2$

نحل اذن النظمة التالية :

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1)(x-1)^2+(y-2)^2=1\\(2)\,y=3\end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1) $3=y$ فنجد :

$(1)(x-1)^2+1=1$ يعني: $(x-1)^2=0$ يعني: $x=1$

ومنه نقطة التماس هي : $T(1;3)$

تمرين18: أدرس تحليليا تقاطع الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(2;1)$ وشعاعها $R=5$ مع المستقيم (D) الذي معادلته :

$(D):\ 3x+y-2=0$

الجواب: نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$d(\Omega,(P))=\dfrac{|6+1-2|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{10}}=\dfrac{5\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}<R=5$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

معادلة الدائرة هي : $(x-2)^2+(y-1)^2=(5)^2$ تكافئ:

$x^2+y^2-4x-2y-20=0$

نحدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

نحل اذن النظمة التالية :

$$\begin{cases}(1)\,x^2+y^2-4x-2y-20=0\\(2)\,3x+y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\,x^2-x-2=0\\(2)\,y=-3x+2\end{cases}$$

نحسب مميز المعادلة (1) فنجد: $\Delta=9$ ومنه للمعادلة

حلين هما : $x_1=\dfrac{1+3}{2}=2$ و $x_2=-1$

اذا كانت $x_1=2$ فان : $y=-4$

اذا كانت $x_1=-1$ فان : $y=5$

ومنه نقطتا التقاطع هما : $A(-1;5)$ و $A(2;-4)$

تمرين19: أدرس تحليليا تقاطع الدائرة (C) التي معادلتها : $x^2+y^2-2x-8y+1=0$ (1) مع المستقيم (D) المعرف بتمثيله البارامتري : $(D):\ \begin{cases}x=1+2t\\y=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

الجواب: نعوض في المعادلة (1) فنجد :

$(1+2t)^2+t^2-2(1+2t)-8t+1=0$ يعني: $5t^2-8t=0$ يعني: $t(5t-8)=0$

يعني: $t_1=0$ أو $t_2=\dfrac{8}{5}$

اذا كانت $t_1=0$ نعوض في $\begin{cases}x=1+2t\\y=t\end{cases}$ فنجد $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$:

اذا كانت $t_2=\dfrac{8}{5}$ نعوض فنجد $\begin{cases}x=\dfrac{21}{5}\\y=\dfrac{8}{5}\end{cases}$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

و نقطتا التقاطع هما : $A(1;0)$ و $B\left(\dfrac{21}{5};\dfrac{8}{5}\right)$

VI. معادلة ديكارتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة معلومة

تذكير: يكون المستقيم (D) مماسا للدائرة (C) ذات المركز Ω عند النقطة A إذا وفقط إذا كان : (D) عموديا على المستقيم (ΩA)

خاصية: لتكن الدائرة (C) التي معادلتها $x^2+y^2+ax+by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة من الدائرة (C)

معادلة ديكارتية للمماس للدائرة (C) في النقطة A هي :

$$(x-x_A)\left(\frac{a}{2}+x_A\right)+(y-y_A)\left(\frac{b}{2}+y_A\right)=0$$

ملحوظة: حصلنا على معادلة المماس للدائرة (C) في النقطة A باستعمال التكافؤ : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0 \Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

مثال : لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي :

$(1)\ x^2+y^2-4x-2y+1=0$

1) تأكد أن $A(0;1)\in(C)$ ثم حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A

الجواب : 1) نتحقق أن احداثيات $A(0;1)$ تحقق المعادلة (1)

$0^2+1^2-4\times0-2\times1+1=0$ (1) ومنه $A(0;1)\in(C)$

$a=4;b=-2;c=1$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(4)^2+(-2)^2-4\times1=16+4-4=16>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-2;1)$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$

2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A ؟؟؟؟

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A\Omega}=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$ ولدينا : $\overrightarrow{AM}(x-0;y-1)$ و

$\overrightarrow{A\Omega}(-2;0)$

$-2(x-0)=0\Leftrightarrow-2(x-0)+0(y-1)=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

$x=0\Leftrightarrow M(x;y)\in(D)$

ومنه معادلة مماس الدائرة (C) في النقطة $A(0;1)$ هو المستقيم الذي معادلته :

$(D):x=0$

تمرين20: لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي :

$x^2+y^2+4x+4y-2=0$

و المستقيم (D) الذي معادلته : $x+3y-2=0$

1. حدد مركز وشعاع الدائرة (C)
2. بين أن المستقيم (D) مماس للدائرة (C)
3. حدد إحداثيتي نقطه تماس الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب: 1)نحدد مركز وشعاع الدائرة (C)

$a=4;b=4;c=-2$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(4)^2+(4)^2-4\times-2=16+16+8=40>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(-2;-2)$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}$

2)نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$d(\Omega,(P))=\frac{|-2-6-2|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}=R$

ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

3)نحدد احداثيات نقطة التماس T

معادلة الدائرة هي : $(x+2)^2+(y+2)^2=10$

نحل اذن النظمة التالية :

$$\begin{cases}(1)(x+2)^2+(y+2)^2=10\\(2)x+3y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)(x+2)^2+(y+2)^2=10\\(2)x=2-3y\end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1) $x=2-3y$ فنجد : $y^2-2y+1=0$

يعني : $(y-1)^2=0$ يعني : $y=1$ ومنه : $x=-1$

ومنه نقطة التماس هي : $T(-1;1)$